Fonctions I

Généralités

I. Présentation

« Définition »

On appelle **fonction** un « processus mathématique » qui, à 'tout' nombre réel, en **associe** un 'autre', appelé son **image**.

« Opérande »

On manque d'un mot pour dire le nombre entré dans la fonction, le nombre de départ. On pourrait l'appeler « **opérande** ». (Le mot *antécédent*, qu'on verra plus loin, ne convient pas, car un antécédent ne se conçoit que comme antécédent de quelque chose.) Le mot « opérande » est masculin.

Exemples

- La *fonction carré* est celle qui élève tout nombre réel au carré. L'image de 5, par la fonction carré, est 25.

$$5 \longmapsto \boxed{\text{Fonction carré}} \longrightarrow 25$$

- La *fonction inverse* prend l'inverse d'un nombre. L'image de $\frac{2}{3}$ par la fonction inverse est $\frac{3}{2}$.

- La *fonction racine* prend la racine d'un nombre. L'image de 9 par la fonction racine est 3.
- On peut aussi définir une fonction par n'importe quelle expression algébrique. On peut par exemple décréter que, si x est le nombre de départ, alors son image sera $\frac{x^2+1}{x-5}$.

II. Notations

Fonction

Une fonction étant un *objet mathématique*, on peut la représenter par une lettre, au même titre qu'un point, une figure, un nombre ou un ensemble.

Image d'un nombre par une fonction

Soit F une fonction et x un nombre appartenant à l'ensemble de définition de F.

Alors, on note « $F(x)$ » (lire : « F de x ») l'image, par la fonction F, du nombre x (l'image, par <u>F, de x</u>.)

Entre la lettre F et le (x), il n'y a pas de signe opératoire implicite, pas de multiplicationC'est F elle-même qui joue le rôle d'opérateur.

Définir une fonction par une expression algébrique

Pour dire que g est la fonction carré, on peut désormais écrire :

« quel que soit le réel x : $g(x)=x^2$ »

Quantificateurs

La phrase précédente peut encore s'écrire :

« $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ g(x) = x^2$ »

Le signe « $\forall$ » se lit « <u>quel que soit</u> », ou encore « pour tout ». Il n'a rien à voir avec la notion de fonction, mais nous choisissons de l'introduire ici, car il nous permettra d'économiser des signes. Si E est un ensemble, au lieu d'écrire « Pour tout x appartenant à E », on peut écrire : « $\forall x \in E$ ». Après le signe « $\forall$ », on doit systématiquement rencontrer <u>une</u> variable (n'ayant pas été introduite antérieurement dans le texte). Nous n'utiliserons ce signe que dans le contexte : « $\forall x \in E$ », où x est donc une nouvelle variable et E un ensemble.

Principe de substitution

Si l'on définit une fonction F par une expression algébrique, par exemple : $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ F(x) = x^2 + x + 1$, alors, puisque l'égalité est vraie « quel que soit » x, elle est vraie, en particulier, si l'on attribue à x la valeur $\mathbf{2}$. On a donc :

$$F(\mathbf{2}) = \mathbf{2}^2 + \mathbf{2} + 1$$

L'égalité reste vraie, bien entendu, lorsque x vaut $\sqrt{2}+5$:

$$F\left(\sqrt{2}+5\right) = \left(\sqrt{2}+5\right)^2 + \left(\sqrt{2}+5\right) + 1$$

Et si, maintenant, on veut exprimer l'image de $2y+5$ par F (où y est un réel quelconque), rien n'empêche de poser $x = 2y+5$ et d'écrire : $F(2y+5) = (2y+5)^2 + (2y+5) + 1$

Ce qui est vrai pour tout y l'étant aussi pour tout x ; on peut tout aussi bien écrire : $F(2x+5) = (2x+5)^2 + (2x+5) + 1$

Bref, dans l'égalité « $F(x) = x^2 + x + 1$ », <u>on peut remplacer x par « ce qu'on veut »</u> : une constante, une autre variable ou une expression.

Flèche à talon

Pour exprimer la fonction qui, à tout x réel, associe $x^2 + x + 1$, on écrit : $x \mapsto x^2 + x + 1$. Dans une telle écriture, on peut remplacer la variable x par n'importe quelle autre lettre sans que, vu de l'extérieur, cela ne change quoi que ce soit (on parle alors de *variable muette*.) Ainsi l'expression $y \mapsto y^2 + y + 1$ représente exactement la même fonction.

À gauche de la flèche à talon, on doit toujours rencontrer <u>une</u> variable et non pas une expression ni une constante. On <u>n'</u>écrira <u>pas</u> : « $x + 1 \mapsto (x+1)^2$ »

$F:\ x \mapsto x^2 + x + 1$ se lit : « F est la fonction qui, à tout x, associe $x^2 + x + 1$ ».

III. Ensemble de définition

Ensemble de définition

L'**ensemble de définition** d'une fonction est l'ensemble des valeurs qui admettent une image par cette fonction.

On parle aussi de **domaine de définition** ou encore d'**ensemble de départ**.
Lorsqu'un nombre n'a pas d'image, par une fonction donnée, on dit parfois que c'est une *valeur interdite*. L'ensemble de définition est le *complémentaire* de l'ensemble des valeurs interdites. C'est l'ensemble des « valeurs autorisées » pour la fonction considérée. C'est souvent $\mathbb{R}$.

Exemples

Par la fonction inverse, il n'y a qu'un seul nombre qui n'ait pas d'image, qui soit une « valeur interdite » : c'est 0. Donc l'ensemble de définition est le *complémentaire* de $\{0\}$, c'est-à-dire $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$, qu'on peut aussi noter $\mathbb{R}^*$.

Par la fonction racine, tous les nombres positifs (y compris zéro) admettent une image. Mais les nombres strictement négatifs n'ont pas de racine. Donc l'ensemble de définition de la fonction racine est l'ensemble des réels positifs, c'est-à-dire $[0;+\infty[$, qu'on peut aussi noter $\mathbb{R}_+$.

Tous les nombres réels ont un carré, donc l'ensemble de définition de la fonction carré est $\mathbb{R}$.

Ensemble d'arrivée

Pour nous, en seconde, l'ensemble d'arrivée sera toujours $\mathbb{R}$. Il n'est pas nécessaire que toutes les valeurs de l'ensemble d'arrivée soient atteintes. Par exemple, on peut considérer que l'ensemble d'arrivée de la fonction carré est $\mathbb{R}$, alors que les valeurs strictement négatives ne sont jamais atteintes par la fonction carré.

Notation complète avec la flèche à talon

On peut préciser, dans la notation avec flèche à talon, l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée. Ainsi, l'écriture :

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

se lit : « soit f la fonction qui va de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ et qui, à tout x, associe $\frac{1}{x}$. La flèche du haut n'est pas une flèche à talon.

IV. Antécédents

Définition

Soient a et b deux nombres réels donnés. Par une fonction donnée,

a est <u>un</u> **antécé<u>d</u>ent** de b <u>ssi</u> b est <u>l</u>'image de a

(Rappelons que « ssi » est une abréviation de « si, et *seulement si* ».)

Remarque Un réel peut avoir plusieurs antécédents. Il peut aussi ne pas en avoir du tout.

Exemples Par la fonction carré, 9 a deux antécédents : 3 et −3, alors que −9 n'a pas d'antécédent, car il n'y a pas de nombre réel dont le carré soit égal à −9.

V. Fonctions particulières

Fonctions usuelles

Nous avons déjà rencontré la *fonction carré* ($x \mapsto x^2$), la *fonction inverse* ($x \mapsto \frac{1}{x}$) et la *fonction racine* ($x \mapsto \sqrt{x}$).

Fonction identité

La **fonction identité** est la fonction qui ne fait rien : le nombre qui sort est identique au nombre entré. C'est la fonction $x \mapsto x$. On la note *Id*.

Fonctions constantes

Une fonction dont l'image a toujours la même valeur est appelée fonction **constante**. Exemple : $x \mapsto 2$.

La fonction constante $x \mapsto 0$ s'appelle la **fonction nulle**.

Fonctions affines

On appelle fonction **affine** toute fonction qui peut s'écrire sous la forme $x \mapsto ax+b$, où a et b sont des constantes, c'est-à-dire indépendantes de x.

Si de plus $b = 0$, alors la fonction est dite **linéaire**.

Exemples : $x \mapsto 2x+1$ est une fonction affine.
$x \mapsto 2x$ est une fonction linéaire (donc aussi affine).

VI. Fonctions paires et impaires

Considérons d'abord, pour simplifier, le cas des fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

Définitions

Une fonction est dite **paire** lorsque, par cette fonction, l'image d'un nombre est toujours égale à celle de l'opposé de ce nombre. Autrement dit, lorsque : $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ f(-x) = f(x)$.

Une fonction est dite **impaire** lorsque l'image de l'opposé est toujours égale à l'opposé de l'image. Autrement dit, lorsque : $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ f(-x) = -f(x)$.

Etudier la **parité** d'une fonction, c'est regarder si elle est paire ou impaire.

Remarque Une fonction peut très bien n'être ni l'un ni l'autre, c'est même le plus souvent le cas.

Exemples La fonction carré est *paire*. La fonction cube ($x \mapsto x^3$) est *impaire*. La fonction $x \mapsto x+1$ n'est ni paire ni impaire.

Dans le cas où l'ensemble de définition n'est pas $\mathbb{R}$, il faut d'abord, pour qu'une fonction soit paire ou impaire, que son ensemble de définition D soit « symétrique par rapport à 0 », c'est-à-dire qu'on ait : $\forall x \in \mathbb{R}$; si $x \in D$ alors, $-x \in D$.